

Über eine besondere Gattung hydrodynamischer Probleme.

I. Teil.

Vom

ord. Lehrer **Hermann Klang.**

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des städtischen Progymnasiums zu Lötzen.
Ostern 1890.

Königsberg i. Pr.
Hartungsche Buchdruckerei.

1890. Progr. Nr. 12.



Obgleich im allgemeinen hydrodynamische Probleme zu den schwierigsten der Mechanik gehören, giebt es eine specielle Klasse darunter, die in einfacheren Fällen ohne Schwierigkeit durchführbar ist. Diese Klasse umfasst diejenigen Probleme, bei denen nicht wie im allgemeinen das Gebiet ein veränderliches, erst nach Lösung des Problems bestimmtes, sondern von vornherein gegeben ist. Es kann dies in dreifacher Weise geschehen. Entweder handelt es sich um die Bewegung eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit, oder, was damit wesentlich identisch ist, um die Bewegung einer ebenfalls unendlichen Flüssigkeit, in der ein starrer Körper festgehalten wird, oder drittens, die Flüssigkeit bewegt sich, von einer festen Hülle eingeschlossen.

Die nachfolgende Arbeit wird nach einigen allgemeinen Bemerkungen drei Arten der letzteren Gattung behandeln, nämlich die, bei welchen die Hülle eine Kugel oder ein rechtwinkliges Parallelepiped oder ein Kreiscylinder ist. — Dabei wird immer die Masse der Hülle, sowie die Reibung der Flüssigkeit in sich und an der festen Wand vernachlässigt werden.

§ 1. Allgemeines.

Es ist klar, dass die letzte der oben erwähnten Gattungen noch wesentlich einfacher zu behandeln sein muss als die beiden ersten, weil hier zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials, von dem alles abhängt, neben der Hauptgleichung $\Delta\varphi = 0$ nur noch die Oberflächenbedingung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = N$ für die endliche Begrenzung zu berücksichtigen ist, während sonst noch Bedingungen wegen der Begrenzung der Flüssigkeit im Unendlichen hinzukommen. Es könnte zwar fraglich erscheinen, ob die beiden Gleichungen

$$1)\quad \Delta\varphi = 0 \qquad\qquad 2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = N$$

von denen die letztere aussagt, dass die Normalkomponente eines Flüssigkeitsteilchens an der festen Wand der Normalkomponente des betreffenden Punktes der festen Wand gleich sein muss, zur eindeutigen Bestimmung von φ genügen, doch überzeugt man sich hiervon leicht indirekt. Gäbe es nämlich zwei Funktionen φ und φ_1, die den Gleichungen 1 und 2 genügten, so müsste ihre Differenz $\varphi - \varphi_1 = \psi$ den Gleichungen $\Delta\psi = 0$ und $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ genügen. Nach einer bekannten Form des Greenschen Satzes ist aber allgemein:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dv = -\iiint \psi \, . \, \Delta\psi \, . \, dv - \int \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, . \, do$$

Die Bedingungen $\Delta\psi = 0$ und $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ fordern also, dass

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \text{ d. h. } \psi = \text{Konst.}$$

ist. Es kann also φ^1 von φ nur durch eine Konstante unterschieden sein, auf die es nicht ankommt, da stets nur die Differentialquotienten von φ gebraucht werden. Ist daher auf irgend einem Wege eine Funktion φ gefunden, die den Bedingungen 1 und 2 genügt, so ist φ das Geschwindigkeitspotential.

Ohne vorläufig die Form der Hülle festzusetzen, führe ich zwei Koordinatensysteme ein, ein im Raume festes, $\xi\ \eta\ \zeta$, und ein zweites, x y z, welches mit dem Körper fest verbunden ist; und dessen Anfangspunkt O heisse. Sind ferner u v w die Geschwindigkeitskomponenten von O nach den Achsen x y z, und p q r die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit für dieselben Achsen, so sind

$$U = u + z\,q - y\,r$$
$$V = v + x\,r - z\,p$$
$$W = w + y\,p - x\,q$$

die Geschwindigkeits-Komponenten eines im Körper festen Punktes x y z. Die Normal-Komponente, N, eines festen Oberflächenpunktes drückt sich durch U, V, W aus:

$$N = U\cos(nx) + V\cos(ny) + W\cos(nz)$$

wenn man mit n die Normale in die Flüssigkeit h i n e i n bezeichnet. Demnach wird die Bedingungsgleichung 2:

3) $$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (u + zq - yr)\cos(nx) + (v + xr - zp)\cos ny + (w + yp - xq)\cos nz$$

Setzt man nun

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\psi_1 + q\psi_2 + r\psi_3$$

und kann man dann die φ_h und ψ_h so bestimmen, dass

4a) und 4b) $$\Delta\varphi_h = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta\psi_h = 0$$

und

5a) $$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos nx \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos ny \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos nz \end{array} \right|$$ und 5b) $$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = y\cos(nz) - z\cos(ny) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = z\cos(nx) - x\cos(nz) \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial n} = x\cos(ny) - y\cos(nx) \end{array} \right|$$

ist, so ist das Geschwindigkeitspotential bestimmt.

Ist aber φ bekannt, so sind auch die Differentialgleichungen der Bewegung gegeben. Es ist zu unterscheiden die Bewegung eines Punktes, der mit der Hülle fest verbunden ist — diese Bewegung mag die äussere heissen — von der inneren, relativen Bewegung des Flüssigkeitsteilchens gegen die feste Hülle. Die Differentialgleichungen für die letztere Bewegung sind gegeben durch:

$$
6) \qquad \left| \begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{dx}{dt} + u + zq - yr \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{dy}{dt} + v + xr - zp \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{dz}{dt} + w + yp - xq
\end{aligned} \right.
$$

welche aussagen, dass die Geschwindigkeit eines und desselben beweglichen Flüssigkeitsteilchens sich zusammensetzt aus seiner relativen Geschwindigkeit gegen den Körper und aus der Geschwindigkeit seines Ortes im Körper.

Die Differentialgleichungen der äusseren Bewegung folgen in bekannter Weise wie bei einem festen Körper aus dem Ausdruck für die lebendige Kraft, welcher für einen Körper, der symmetrisch in Bezug auf die x, y, z-Achsen ist, was von jetzt ab angenommen sei, die Form hat:

$$T = \frac{1}{2}\left\{ \mathit{\Delta} u^2 + B v^2 + \Gamma w^2 + A p^2 + B q^2 + C r^2 \right\}$$

Die Koefficienten $\mathit{\Delta}$, B, Γ sind bei einem festen Körper alle drei gleich der Masse, und A, B, C repräsentieren die Hauptträgheitsmomente. Die Koefficienten mögen deshalb beim flüssigen Körper die modifizierten Massen resp. Trägheitsmomente heissen. Sie ergeben sich aus dem Potential φ, nämlich:

$$\mathit{\Delta} = -\int \varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\, do \qquad\qquad A = -\int \psi_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial u}\, do$$

und analog B, Γ und B, C, wobei die Integration über die ganze Oberfläche der Flüssigkeit auszudehnen ist.

Die Funktionen φ_h, welche den Gleichungen 4a und 5a zu genügen haben, lassen sich ganz allgemein bestimmen für jede beliebige Form der Hülle, denn da man cos(nx), cos(ny), cos(nz) durch $\frac{\partial x}{\partial n}$, $\frac{\partial y}{\partial n}$, $\frac{\partial z}{\partial n}$ ersetzen kann, so werden die Gleichungen 5a befriedigt durch

$$7) \qquad \underline{\varphi_1 = x} \qquad \underline{\varphi_2 = y} \qquad \underline{\varphi_3 = z}$$

welche Werte auch den Hauptgleichungen $\Delta\varphi_h = 0$ genügen und demnach die richtigen sind.

Ebenso allgemein lassen sich auch die modifizierten Massen $\mathit{\Delta}$, B, Γ bestimmen, denn es ist z. B.

$$\mathit{\Delta} = -\int x \frac{\partial x}{\partial n}\, do$$

und dieses Intregal ist nichts anderes als das Volumen der Flüssigkeit, oder, da deren Dichtigkeit stillschweigend $= 1$ vorausgesetzt ist, ihre Masse m. Denn, wenn man berücksichtigt, dass

$$- do . \frac{\partial x}{\partial n} = dy . dz$$

gesetzt werden kann, so ist das Intregal die Summe von Elementarprismen von der Grundfläche dy dz und der Höhe x, erstreckt über den ganzen Körper, also gleich V. Dasselbe folgt auch aus der schon früher benutzten Form des Greenschen Satzes, wenn man $\psi = x$ setzt. Dann wird

$$A = -\int \bar{x} \frac{\overline{\partial x}}{\partial n} do = \iiint (1 + 0 + 0) dv + \iiint x . 0 . dv = V = m$$

Gleiches lässt sich offenbar auch von B und Γ beweisen, demnach haben wir ebenso, als wenn der betrachtete Flüssigkeitskörper starr und von derselben Dichtigkeit wäre:

8) $$\underline{A = B = \Gamma = m}$$

Die Grössen ψ_1 ψ_2 ψ_3 sind nicht allgemein bestimmbar. Es lässt sich nur noch zeigen, dass für einen Rotationskörper das der Rotationsachse entsprechende ψ verschwindet. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = x \cos(ny) - y \cos(nx)$$

Für einen Rotationskörper um die z-Achse ist aber:

$$x = \varrho \cos\varphi \qquad y = \varrho . \sin\varphi \qquad z = f(\varrho)$$

woraus folgt:

$$\cos(ny) = \frac{\partial \varrho}{\partial n} . \sin\varphi$$

$$\cos(nx) = \frac{\partial \varrho}{\partial n} . \cos\varphi$$

demnach:

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial n} = \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial n} (\cos\varphi . \sin\varphi - \sin\varphi \cos\varphi) = 0$$

und da auch

$$\Delta(0) = 0$$

ist, so folgt: Es ist für Rotationskörper um die z-Achse

9) $$\psi_3 = 0$$

$$\text{also auch} \quad \underline{C = 0}$$

Formen wir schliesslich noch die Differentialgleichungen 6 auf Grund des allgemeinen Resultats in 7 um, so ergiebt sich:

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + q\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + r\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - qz + ry \\ \dfrac{dy}{dt} = p\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} + r\dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} - rx + pz \\ \dfrac{dz}{dt} = p\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + q\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} + r\dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} - py + qx \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, da sie u, v, w gar nicht mehr enthalten, dass ganz allgemein die innere Bewegung von der Geschwindigkeit des Schwerpunkts ganz unabhängig, nur durch die Form der Hülle (von der die ψ abhängen) und die Drehungsgeschwindigkeiten um den Schwerpunkt, p, q, r, bestimmt ist. Sind p, q, r alle drei gleich 0, d. h. ist die äussere Bewegung nur geradlinig, so findet gar keine innere Bewegung statt.

Damit ist alles erledigt, was sich allgemein sagen lässt. Ich beginne nun mit speciellen Fällen der Hülle.

§ 2. Die Kugel.

Dieser Fall erledigt sich sehr einfach, da nach dem Satze 9 des § 1 sein muss:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0 \qquad A = B = C = 0$$

Die lebendige Kraft einer flüssigen Kugel erhält also die einfache Form

$$T = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)$$

woraus die äussere Bewegung bei gegebenen Kräften leicht zu bestimmen ist. Aus dem Verschwinden von A, B und C folgt beispielsweise, dass eine flüssige Kugel, die um eine beliebige Achse schwingt, bei Vernachlässigung der Hülle ein genaues mathematisches Pendel abgeben würde.

Die Gleichungen 10 erhalten die einfache Form:

$$\frac{dx}{dt} = -qz + ry$$

$$\frac{dy}{dt} = -rx + pz$$

$$\frac{dz}{dt} = -py + qx$$

Multiplicieren wir dieselben mit x, y, z und addieren, so wird:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = \varrho \cdot \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

wenn $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ gesetzt wird. Es ist also $\varrho =$ Konst., d. h. jedes Teilchen bleibt auf einer Kugeloberfläche.

Für das Quadrat der relativen Geschwindigkeit eines Teilchens ergiebt sich:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2) - (px+qy+rz)^2$$

Bezeichnet man mit D die Richtung der Drehungsachse und zugleich die Geschwindigkeit um dieselbe, so ist:

$$p = D \,.\, \cos(D, x)$$
$$q = D \,.\, \cos(D, y) \qquad\qquad p^2 + q^2 + r^2 = D^2$$
$$r = D \,.\, \cos(D, z)$$

Da ferner

$$x = \varrho \,.\, \cos(\varrho, x) \qquad y = \varrho \,.\, \cos(\varrho, y) \qquad z = \varrho \,.\, \cos(\varrho, z)$$

so wird

$$V^2 = D^2\varrho^2 - D^2\varrho^2 \cos^2(D, \varrho)$$

also

$$V = -D \,.\, \varrho \,.\, \sin(D, \varrho) = -D \,.\, \varrho_1$$

wenn ϱ_1 der Abstand des Flüssigkeitsteilchens von der Drehungsachse durch den Mittelpunkt ist, d. h. jedes Teilchen hat die relative Winkelgeschwindigkeit $-D$. Da dies aber zugleich die Winkelgeschwindigkeit der äusseren Hülle ist, nur mit entgegengesetzten Zeichen, so folgt, dass die ganze Flüssigkeit in absoluter Ruhe bleibt, so lange die fortschreitende Bewegung, d. h. $u, v, w = 0$ ist.

Die Berechtigung, oben das negative Zeichen beim Wurzelziehen zu nehmen, folgt am einfachsten aus der Betrachtung eines speciellen Falles. Denkt man sich die z-Achse als augenblickliche Drehungsachse und betrachtet die Geschwindigkeit eines Punktes der x-Achse, so ist zu setzen

$$x = \varrho \qquad y = z = 0 \qquad r = D \qquad p = q = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = \varrho \,.\, W$$

wenn W die relative Winkelgeschwindigkeit ist. Anderseits ist aber

$$\frac{dy}{dt} = -D\varrho$$

also ist $W = -D$ zu setzen.

§ 3. **Das rechtwinklige Parallelepiped.**

Der Anfangspunkt des xyz-Systems möge in dem Mittelpunkt des rechtwinkligen Parallelepipeds liegen, und die Achsen mit den Richtungen der Kanten zusammenfallen, deren Längen 2a, 2b, 2c seien. Dann sind die 6 Flächen durch $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ gegeben und die Oberflächenbedingungen für die zunächst zu bestimmenden Teil-Potentiale ψ_1, ψ_2, ψ_3 nehmen nach dem allgemeinen Schema, das in 5b des § 1 gegeben ist, folgende Gestalt an:

$$1)\quad \left| \begin{array}{lll} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = z & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -z & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = x \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = y & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -x & \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{für } x = \pm a \\ \text{für } y = \pm b \\ \text{für } z = \pm c \end{array}$$

Wie aus diesen Gleichungen ersichtlich ist, ergeben sich zwei von den drei Grössen ψ aus der dritten einfach durch cyklische Vertauschung von x, y, z und a, b, c. Es ist also nur ein ψ zu bestimmen nötig. Ich wähle dazu ψ_3, für welches die Bedingungen bestehen:

$$\varDelta \psi_3 = 0 \qquad \begin{array}{ll} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = -y & \text{für } x = \pm a \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = x & \text{für } y = \pm b \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0 & \text{für } z = \pm c \end{array}$$

Diesen Bedingungen kann man offenbar durch eine Funktion von x und y allein genügen. Um letztere zu bestimmen, ohne mit sehr langen Formeln zu rechnen, setze ich noch

$$\psi_3 = \Psi + \Psi'$$

und versuche die Grössen Ψ und Ψ' so zu bestimmen, dass:

2) und 2′) $\qquad \varDelta \Psi = 0 \qquad \varDelta \Psi' = 0$

3) und 3′) $\qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x = \pm a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right)_{x = \pm a} = -y$

4) und 4′) $\qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{y = \pm b} = x \qquad \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right)_{y = \pm b} = 0$

wird.

Der Vorteil der Teilung ist hier ein doppelter, da sich Ψ' wieder sofort aus Ψ ergeben muss, wenn man x, y, a, b in resp. —y, x, b, a ändert. Es erübrigt also noch Ψ durch die Gleichungen 2, 3 und 4 zu bestimmen.

Es giebt zwei wesentlich verschiedene Formen von partikulären Lösungen, welche der Hauptgleichung $\varDelta \Psi = 0$ genügen, nämlich:

$$e^{\pm \alpha (ix \pm y)} \quad \text{und} \quad e^{\pm \beta (iy \pm x)}$$

Offenbar wird eine Kombination dieser Formen die Gleichung 3 nur dann befriedigen können, wenn jede Form einzeln ihr genügt, da x einmal in einer Exponentialfunktion, das andere Mal in einer trigonometrischen Funktion vorkommt. Man kann also die beiden Formen einzeln betrachten. Aus der zweiten folgt, dass auch

$$M\,e^{+i\beta y+\beta x} + N\,e^{i\beta y-\beta x} + P\,e^{-i\beta y+\beta x} + Q\,e^{-i\beta y-\beta x}$$

eine partikuläre Lösung ist. Soll diese der Gleichung 3 genügen, so muss sein:

$$M\,e^{i\beta y+\beta a} - N\,e^{i\beta y-\beta a} + P\,e^{-i\beta y+\beta a} - Q\,e^{-i\beta y-\beta a} = 0$$

und $\quad -M \quad „ \quad +M \quad „ \quad -Q \quad „ \quad +P \quad „ \quad = 0$

woraus durch Addition und Subtraktion die Gleichungen folgen:

$$\left(e^{\beta a} + e^{-\beta a}\right)\left\{(M-N)\,e^{i\beta y} + (P-Q)\,e^{-i\beta y}\right\} = 0$$

$$\left(e^{\beta a} - e^{-\beta a}\right)\left\{(M+N)\,e^{i\beta y} + (P+Q)\,e^{-i\beta y}\right\} = 0$$

Da $\beta = 0$ auszuschliessen ist, so müssen die Ausdrücke in den beiden grossen Klammern verschwinden und zwar für jedes beliebige y. Daraus folgt:

$$M - N = 0 \qquad P - Q = 0$$

$$M + N = 0 \qquad P + Q = 0$$

also $M = N = P = Q = 0$, d. h. die zweite Form der partikulären Lösung ist mit 3 nicht vereinbar. Es bleibt also nur noch die erste, aus welcher die partikuläre Lösung folgt:

$$A\,e^{i\alpha x+\alpha y} + B\,e^{i\alpha x-\alpha y} + C\,e^{-i\alpha x+\alpha y} + D\,e^{-i\alpha x-\alpha y}$$

Soll diese der Gleichung 3 genügen, so folgt

$$A\,e^{i\alpha a+\alpha y} + B\,e^{i\alpha a-\alpha y} - C\,e^{-i\alpha a+\alpha y} - D\,e^{-i\alpha a-\alpha y} = 0$$

und $\quad -C \quad „ \quad -D \quad „ \quad +A \quad „ \quad +B \quad „ \quad = 0$

also:

$$\left(e^{i\alpha a} + e^{-i\alpha a}\right)\left\{(A-C)\,e^{\alpha y} + (B-D)\,e^{-\alpha y}\right\} = 0$$

$$\left(e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}\right)\left\{(A+C)\,e^{\alpha y} + (B+D)\,e^{-\alpha y}\right\} = 0$$

Da $\alpha = 0$ auszuschliessen ist, so folgt nach der zweiten Gleichung

5) $$\underline{A + C = 0} \qquad \underline{B + D = 0}$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen wird die erste Gleichung:

$$\left(e^{i\alpha a} + e^{-i\alpha a}\right)\left(A\,e^{\alpha y} + B\,e^{-\alpha y}\right) = 0$$

Dies kann nur sein, wenn

$$A = 0 \qquad B = 0$$

oder $\alpha = 0 \qquad A + B = 0$

oder $e^{i\alpha a} + e^{-i\alpha a} = 0$

Die beiden ersten Fälle sind auszuschliessen, da sie auf Konstanten führen, der dritte Fall liefert die Bedingung $\cos \alpha a = 0$, also

6) $$\alpha = \frac{2h-1}{2a} \pi$$

worin h alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ durchlaufen kann. Die partikuläre Lösung, welche nach 5 die Form hat:

$$\left(A e^{\alpha y} + B e^{-\alpha y}\right) . \sin \alpha x$$

hat noch die Gleichung 4 zu befriedigen, nach welcher sein muss:

$$\alpha\left(A e^{\alpha b} - B e^{-\alpha b}\right) \sin \alpha x = \alpha\left(A e^{-\alpha b} - B e^{+\alpha b}\right) . \sin \alpha x = x$$

Hierin sind zwei Gleichungen enthalten, deren erste ergiebt:

$$(A+B)\left(e^{\alpha b} - e^{-\alpha b}\right) = 0$$

also, da $\alpha = 0$ nicht brauchbar ist:

7) $$A + B = 0$$

Hieraus folgt, wenn man der bequemeren Schreibweise wegen noch $e^{\alpha y} - e^{-\alpha y} = -2i \sin(i\alpha y)$ schreibt, für die partikuläre Lösung die Form:

$$M i \sin(i\alpha y) . \sin(\alpha x)$$

Aus dieser erhält man die allgemeine Lösung durch Summation über alle nach 6 möglichen partikulären Lösungen. Es ist also

8) $$\psi = \sum_{1,\infty}^{h} M_h . i \sin\left(i \frac{2h-1}{2a} \pi y\right) . \sin\left(\frac{2h-1}{2a} \pi x\right)$$

worin noch M_h durch

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=b} = -\sum M_h . \alpha_h \cos(i\alpha_h b) \sin(\alpha_h x) = x$$

zu bestimmen ist. Setzt man abkürzend

9) $$-M_h . \alpha_h \cos(i\alpha_h b) = P_h$$

so muss demnach sein:

10) $$\sum_{1,\infty}^{h} P_h . \sin \frac{2h-1}{2a} . \pi x = x$$

Durch Multiplikation von 10 mit $\sin\left(\frac{2k-1}{2a} \pi x\right) dx$ und Integration zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ erhält man hieraus:

$$\Sigma\, P_h . \int_{-a}^{+a} \sin\left(\frac{2h-1}{2a}\pi x\right) . \sin\left(\frac{2k-1}{2a}\pi x\right) dx = \int_{-a}^{+a} x . \sin\left(\frac{2k-1}{2a}\pi x\right) dx$$

oder, wenn man links setzt:

$$\frac{\pi x}{2a} = \lambda$$

und rechts:

$$\frac{2k-1}{2a}\pi x = \varphi$$

so wird:

$$11)\qquad \Sigma\, P_h . \frac{2a}{\pi} . \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\big((2h-1)\lambda\big) . \sin\big((2k-1)\lambda\big)\, d\lambda = \frac{4a^2}{(2k-1)^2\pi^2} \int_{-\frac{2k-1}{2}\pi}^{+\frac{2k-1}{2}\pi} \varphi . \sin\varphi\, d\varphi$$

Nun ist aber:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\big((2h-1)\lambda\big) . \sin\big((2k-1)\lambda\big)\, d\lambda = 0 \text{ für } h \lessgtr k$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\big((2k-1)\lambda\big) d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{2k-1}{2}\pi}^{+\frac{2k-1}{2}\pi} \varphi . \sin\varphi\, d\varphi = \left[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\right]_{-\frac{2k-1}{2}\pi}^{+\frac{2k-1}{2}\pi} = (-1)^{k+1} . 2$$

Demnach ergiebt sich aus 11, indem von der Summe links nur das kte Glied übrig bleibt:

$$a . P_k = (-1)^{k+1} . \frac{8a^2}{(2k-1)^2\pi^2} = (-1)^{k+1} . \frac{2}{\alpha^2}$$

also mit Berücksichtigung 9:

$$\underline{M_h = (-1)^h . \frac{2}{a\,\alpha^3 . \cos(i\alpha b)}}$$

Damit ist Ψ bestimmt und einer früheren Bemerkung nach auch Ψ'. Ihre Summe giebt:

$$12)\qquad \psi_3 = \sum\big(M_h\, i \sin(i\alpha y) \sin(\alpha x) + N_h\, i \sin(i\beta x) \sin(\beta y)\big)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$15)\quad \left|\begin{array}{ll} M_h = (-1)^h \cdot \dfrac{2}{a\alpha^3 . \cos(i\alpha b)} & N_h = (-1)^{h+1} \cdot \dfrac{2}{b . \beta^3 . \cos(i\beta a)} \\[2ex] \alpha = \dfrac{2h-1}{2a}\pi & \beta = \dfrac{2h-1}{2b} . \pi \end{array}\right.$$

Aus ψ_3 folgen ψ_1 und ψ_2, wie schon erwähnt, einfach durch cyklische Vertauschung der Buchstaben x y z und a b c. Es ist demnach jetzt das ganze Geschwindigkeitspotential für ein rechtwinkliges Parallelepiped bekannt, da die φ_h allgemein bestimmt wurden.

Ich gehe nun zur Bestimmung der modifizierten Trägheitsmomente über.

Es ist wieder nur nötig, den Ausdruck für eine der drei Konstanten A, B, C zu bestimmen, da die andern durch Vertauschung von a, b, c folgen. Es ist:

$$C = -\int \overline{\psi_3}\, \frac{\overline{\partial \psi_3}}{\partial n} . do$$

Da ψ_3 nur x und y enthält, so wird auf den Flächen $z = \pm c$ das Integral verschwinden. Benutzen wir die abgekürzte Schreibweise nach 12, so haben wir auf den vier übrigen in Betracht kommenden Flächen:

Fläche	$\overline{\psi_3}$	$-\dfrac{\overline{\partial\psi_3}}{\partial n}$	do
$x = +a$	$\sum M_h i \sin i\alpha y . \sin \alpha a + \sum N_h i \sin i\beta a . \sin \beta y$	$-y$	dy dz
$x = -a$	$-\sum$ „ $-\sum$ „	$+y$	dy dz
$y = +b$	$+\sum M_h i \sin i\alpha b . \sin \alpha x + \sum N_h i \sin i\beta x . \sin \beta b$	$+x$	dx dz
$y = -b$	$-\sum$ „ $-\sum$ „	$-x$	dx dz

Die Anteile von C auf gegenüberliegenden Flächen addieren sich. Ferner lässt sich eine Integration nach z sofort ausführen, und es wird:

$$C = 4c . \left\{\begin{array}{l} \sum M_h i \sin i\alpha b \displaystyle\int_{-a}^{+a} x . \sin \alpha x\, dx + \sum N_h . i \sin \beta b \int_{-a}^{+a} x . \sin i\beta x\, dx \\ -\sum M_h i \sin \alpha a \displaystyle\int_{-b}^{+b} y . \sin i\alpha y\, dy - \sum N_h . i \sin i\beta a \int_{-b}^{+b} y . \sin \beta y\, dy \end{array}\right\}$$

Nun ist aber, wie sich bei der Bedeutung von α und β leicht ergiebt:

$$\int_{-a}^{+a} x \, . \sin \alpha x \, dx = (-1)^{h+1} . \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\int_{-b}^{+b} y \, . \sin \beta y \, dy = (-1)^{h+1} . \frac{2}{\beta^2}$$

und

$$\int_{-a}^{+a} x \, . \sin i\beta x \, dx = \frac{2ia}{\beta} . \cos(i\beta a) - \frac{2}{\beta^2} . \sin(i\beta a)$$

$$\int_{-b}^{+b} y \, . \sin i\alpha y \, dy = \frac{2ib}{\alpha} . \cos(i\alpha b) - \frac{2}{\alpha^2} . \sin(i\alpha b)$$

Führt man diese Integralwerte, sowie die Ausdrücke für M_h und N_h in den Ausdruck für C ein und beachtet noch, dass

$$\sin(\alpha a) = \sin(\beta b) = (-1)^{h+1}$$

ist, so wird:

$$C = 16c . \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \sum \frac{\text{tang } i\alpha b}{i\alpha^5} \\ - \frac{a}{b} . \sum \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{b} . \sum \frac{\text{tang } i\beta a}{i\beta^5} \\ - \frac{b}{a} . \sum \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{a} . \sum \frac{\text{tang } i\alpha b}{i\alpha^5} \\ + \frac{1}{b} . \sum \frac{\text{tang } i\beta a}{i\beta^5} \end{array} \right]$$

Nun ist aber:

$$\frac{b}{a} . \sum \frac{1}{\alpha^4} = a^2 . \frac{16\,ab}{\pi^4} . \sum \frac{1}{(2h-1)^4}$$

$$\frac{a}{b} . \sum \frac{1}{\beta^4} = b^2 . \frac{16\,ab}{\pi^4} . \sum \frac{1}{(2h-1)^4}$$

und ausserdem:

$$\sum \frac{1}{(2h-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

demnach

$$\frac{b}{a} \sum \frac{1}{\alpha^4} + \frac{a}{b} \sum \frac{1}{\beta^4} = \frac{a^2+b^2}{6} . ab$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{2h-1}{2} \pi . \frac{b}{a} = \nu \qquad\qquad \frac{2h-1}{2} \pi \frac{a}{b} = \mu$$

und zieht 8abc = m heraus, so wird

$$14)\qquad C = -\frac{a^2+b^2}{3}\,.\,m + m\left\{\frac{4b^4}{a^2}\sum\frac{1}{\nu^5}\,\frac{e^{\nu}-e^{-\nu}}{e^{\nu}+e^{-\nu}} + \frac{4a^4}{b^2}\,.\sum\frac{1}{\mu^5}\,\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{e^{\mu}+e^{-\mu}}\right\}$$

Das erste Glied hat noch eine einfache Bedeutung. Wäre das Parallelepiped fest, so würde sein Trägheitsmoment für die z-Achse sein:

$$M_z = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{a^2+b^2}{3}\,.\,m$$

Der erste Teil ist also nichts anderes, als das negative Trägheitsmoment des festen Parallelepipeds von derselben Dichte. Der zweite Teil hat für alle endlichen Werte von a und b einen positiven, endlichen Wert, denn wegen $\nu > 0$ und $\mu > 0$ liegt $\frac{e^{\nu}-e^{-\nu}}{e^{\nu}+e^{-\nu}}$ und ebenso $\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{e^{\mu}+e^{-\mu}}$ zwischen 0 und 1, und $\frac{b^5}{a^5}\sum\frac{1}{\nu^5} = \frac{a^5}{b^5}\sum\frac{1}{\mu^5} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^5\cdot\sum\frac{1}{(2h-1)^5}$ ist immer konvergent. — Es ist ungewöhnlich, dass, wie hier, der Ausdruck für ein Trägheitsmoment sich aus der Differenz zweier Glieder zusammensetzt, und es könnte dieser Form nach möglich scheinen, dass C bei passender Wahl der Grössen a und b negativ würde. Um sich von der Unmöglichkeit dieses Falles, dem gar kein Sinn beizulegen wäre, zu überzeugen, bleibt bei der komplizierten, nicht endlichen Form des Ausdruckes für C kein anderes Mittel übrig, als sich durch Berechnung einiger Werte von C eine Vorstellung über die Abhängigkeit dieser Grösse von A und B zu bilden. Zu diesem Zwecke nehme ich an, dass $a \geqq b$ ist, worin keine Beschränkung liegt, und setze $\frac{b}{a} = t$, dann wird:

$$15)\qquad \frac{C}{8a^4c} = -\frac{t}{3}(1+t^2) + \frac{2^7.t^2}{\pi^5}\left\{\frac{1}{t^2}\sum\frac{1}{(2h-1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2h-1)\pi t}}{1+e^{-(2h-1)\pi t}} + t^2\sum\frac{1}{(2h-1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2h-1)\frac{\pi}{t}}}{1+e^{-(2h-1)\frac{\pi}{t}}}\right\} = F(t)$$

und es sind alle Möglichkeiten erschöpft, wenn t alle Werte zwischen 0 und 1 durchläuft.

Die numerische Berechnung giebt:

$F(0) = 0$	(0)
$F(\frac{1}{4}) = 0{,}07099$	(0,08854)
$F(\frac{1}{2}) = 0{,}09399$	(0,20833)
$F(\frac{2}{3}) = 0{,}08897$	(0,32099)
$F(\frac{3}{4}) = 0{,}08610$	(0,39063)
$F(1) = 0{,}10436$	(0,66667)

Diese Zahlen — in zweiter Kolumne sind zur Vergleichung die Zahlen für $\frac{C}{8a^4c}$ bei einem festen Körper von der Dichtigkeit 1 angegeben — zeigen wohl zur Genüge, dass C immer positiv bleibt. Sie geben aber noch ein anderes, bemerkenswertes Resultat, welches sich um so deutlicher zeigt, wenn man den Verlauf von F(t) zwischen $t = 0$ und $t = 1$ graphisch darstellt. F(t) nimmt nämlich von $t = 1$ nach $t = 0$ hin anfangs ab, bis es nahe bei $t = \frac{3}{4}$ ein Minimum erreicht, wächst dann wieder bis ca $t = \frac{1}{2}$, um dann weiter gegen 0 hin abzunehmen. Denkt man sich also ein Parallelepiped mit konstantem a und c und lässt b von $b = a$ bis $b = 0$ allmählich abnehmen, so wird ungefähr von $b = \frac{3}{4}a$ bis $b = \frac{1}{2}a$ das Trägheitsmoment C mit abnehmendem b wachsen, eine Erscheinung der bei festen Körpern jede Analogie fehlt, die sich jedoch später bei Betrachtung der Strömungskurven erklären wird.

Nach Bestimmung der Trägheitsmomente ist die äussere Bewegung ganz wie bei festen Körpern in jedem einzelnen Falle zu behandeln, worauf ich hier nicht weiter eingehe. Ebenso muss ich wegen der Beschränktheit des mir zur Verfügung stehenden Raumes die Betrachtung der inneren, relativen Bewegung und die Behandlung des Cylinders mir für eine Fortsetzung vorbehalten.